



TITLE:

Wave Front Setの有限伝播について (函数解析的方法による偏微分方程式の研究)

AUTHOR(S):

西和田, 公正

CITATION:

西和田, 公正. Wave Front Setの有限伝播について (函数解析的方法による偏微分方程式の研究). 数理解析研究所講究録 1974, 205: 28-38

ISSUE DATE:

1974-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105154>

RIGHT:

wave front set の有限伝播について

京大 数理研 西和田 公正

§1 序

偏微分方程式の解の種々の状態の有限伝播性を調べるのには、多くの方法があると思うが、ここでは F. John[3] に従って、次のような方法をとる。即ち R^{n+1} を帯状領域

$$\Omega = \{ (t, x) \in R^{n+1}; \quad a < t < b \}$$

で区切ってみて、そこで解が "ある状態" である点全体が有界である場合には、作用素がどのような形をしていなければならないかを調べることである。 Ω の中で有界であることは、解のその状態が有限伝播していると解釈するわけである。

さて解の support の有限伝播性についての、F. John に端緒をもつ研究は一般 system の場合も含めて S. Matsumura によって完全に解決された。それ故、ここでは解の wave front set について上記の考察を試みる。

$u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対して、 $WF(u)$ の特徴付けは種々あるが、そのうち一番簡単なのはよく知られている次の定義である。

(Hörmander [2])

定義 1 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $((t_0, x_0), (\lambda_0, \xi_0)) \in T^*(\Omega) \setminus 0$ に対して、 $((t_0, x_0), (\lambda_0, \xi_0)) \notin WF(u)$ とは、ある $\phi \in C^\infty(\Omega)$ $\phi(t_0, x_0) \neq 0$, とある (λ_0, ξ_0) の conical nbd $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ が存在し

$$(1.1) \quad |\widehat{\phi u}(\lambda, \xi)| \leq C_N (1 + |\lambda| + |\xi|)^{-N} \quad N=1, 2, \dots, (\lambda, \xi) \in \Gamma$$

が成立つことである。

$$\pi : T^*(\Omega) \setminus 0 \xrightarrow{\text{proj}} \Omega \quad \text{とすると}$$

$\pi WF(u) = \text{sing supp } u$ であるから $WF(u)$ は $\text{sing supp } u$ の拡張概念である。

更に伝播現象を考える時は、次のように時空間を強調しておくことが便利である。

定義 2 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus 0$

$$(1.2) \quad WF_\eta(u) = \{ (t, x) \in \Omega \ ; \ (t, x), (\lambda, a\eta) \in WF(u) \text{ for some } (\lambda, a) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0 \}$$

明らかに

$$(1.3) \quad \text{sing supp } u = \bigcup_{\eta \in \mathbb{R}^n \setminus 0} WF_\eta(u)$$

であることに注意する。

§2 主定理と若干の例

問題は大域的であるので、次の形をした定数係数作用素だけを考える。

$$(2.1) \quad P(D_t, D_x) = D_t^e + \sum_{i \leq \ell} a_{i,x} D_t^i D_x^{\alpha_i} \\ D = (D_t, D_x) = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

定理 $P(D)u = f \quad u, f \in \mathcal{D}'(\Omega)$

ある $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ と、 η の conical mbd $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus 0$ が存在し次の諸条件を満たすとする。

(i) $WF_\eta(u)$ が有界

(ii) $WF_\eta(f) = \emptyset$

(iii) $\eta_m \lambda \rightarrow \infty$ when $P(\lambda, \xi) = 0$, $\Gamma \ni \xi \rightarrow \infty$.

この時、 $WF_\eta(u) = \emptyset$ である。

(1.3) より次の系が従う。

系 $P(D)u = f, \quad f \in C^\infty(\Omega)$

(i) $\text{sing supp } u$ は Ω 上 有界

(ii) $q_m \lambda \rightarrow \infty$ when $P(\lambda, \xi) = 0$, $R^n \ni \xi \rightarrow \infty$,
この時、 $u \in C^\infty(\Omega)$ である。

この系は John の定理 ([3]) と形が似ているために、

(ii) (系の) の代わりに「 P のどの既約因子も weakly hyperbolic でない。(乃至 C hyperbolic でない。)」
という条件を置いたかどうかという疑問が生じる。しかし反例がある。 R^3 で

$$P(\lambda, \xi) = \lambda^2 - \xi_1^2 + \xi_2^{2m}, \quad m \geq 1,$$

を考える。 P は既約で、weakly hyperbolic でも C hyperbolic でもない。(時間軸方向は $(1, 0, 0)$)
この時 $\nu^0 = (1, 1, 0)$ とし、 ν^0 方向の P の localization
を考える。

$$S^{-1}P(\cancel{S\nu^0} + (\lambda, \xi)) = P_{\nu^0}(\lambda, \xi) + O(S^{-1})$$

$S \rightarrow \infty$

ならば $P_{\nu^0}(\lambda, \xi) = 2(\lambda - \xi_1)$ である。そこで
 R^3 の平面 $H : t - x_1 = 0$ の原点に於ける Dirac
測度を $\hat{\delta}$ とおき、 R^3 の超関数 $u_N = (t - x_1)^N \hat{\delta}$
を作る。原点を通り H に垂直な直線を F とする。この時
 u_N は次の諸式を満たす。

$$\text{supp } P_{\psi_0}(D)^k u_N = F, \quad k \leq N$$

$$P_{\psi_0}(D)^{N+1} u_N = 0,$$

この条件は Hörmander [1] の Th 3.1 の前提条件をみたすので、ある $U \in \mathcal{D}'(R^3)$ が存在し

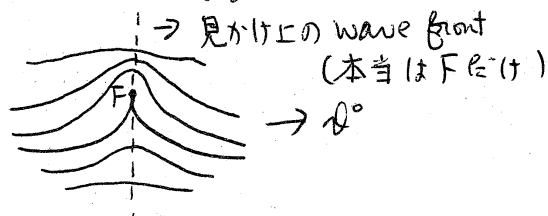
$$P(D)U \in C^\infty(R^3)$$

$$\text{sing supp } U = F$$

である。従って U を Ω に制限した時、 $\text{sing supp } U$ は実際に存在し Ω の中で有界である。更に定理より

$$\bigcup_{\eta_1^2 < \eta_2^2} \text{WF}_\eta(U) = \emptyset \text{ がいえる。しかし } m=1 \text{ の時には}$$

U の wave-front はもっと狭められるはずである。このことは [1] の Th 3.1 の証明をより細かくすることによって得られるだろう。 $U = \text{const}$ の曲面群は円のような場合が考えられる。



($t = \text{const}$ の切片, F は pt)

次に系の(ii)をみたす例を考える。まず、すいての hypoelliptic op. が考えられる。non-hypoelliptic な例としては、例えば $\lambda^2 + \xi_1^2 + \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^2$ などがある。Hypoelliptic 多項式の各変数の最高次の項は、他の変数から独立である。

§3 定理の証明の概要

P が(2.1)のように書けることは、或る $\varepsilon > 0$ と $0 < \rho \leq 1$ に対して $K = \{(\lambda, \xi) ; |\xi| \leq \varepsilon |\lambda|^\rho\}$ とした時、

$$(3.1) \quad \left| \frac{P^{(l, \alpha)}(\lambda, \xi)}{P(\lambda, \xi)} \right| \leq C(1 + |\lambda| + |\xi|)^{-l - \rho|\lambda|}$$

$|\lambda| \text{ large} \quad (\lambda, \xi) \in K$

を意味している。一方次の補題が成り立つ。

補題 $P(D)u = f$, $u, f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 。 P はある K に対して(3.1)をみたす。 f はある $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して

$$(3.2) \quad \left| \widehat{(D^\alpha \varphi) f}(\lambda, \xi) \right| \leq C_N (1 + |\lambda| + |\xi|)^{-N}, \quad N = 1, 2, \dots, \\ \alpha, \quad (\lambda, \xi) \in K$$

この時、同じ φ に対して

$$\left| \widehat{\varphi u}(\lambda, \xi) \right| \leq C'_N (1 + |\lambda| + |\xi|)^{-N}, \quad N = 1, 2, \dots, \\ (\lambda, \xi) \in K$$

f は定理の仮定より $WF_\eta(f) = \emptyset$ であるから、特に $((t, x), (\pm 1, 0)) \notin WF(f)$ である。これより (K の ε を十分小さくとれば) φ, f は(3.2)をみたす。従って u についての或る種の partial regularity が言えたこ

となる。

(補題の証明の概略)

$${}_t P(D) u = \varphi e^{-i(t\lambda + x\xi)}$$

の近似解

$$u_N = w_N e^{-i(t\lambda + x\xi)} / P(\lambda, \xi)$$

$$w_N = \sum_0^N R(\lambda, \xi, D)^k \varphi$$

$$R(\lambda, \xi, D) = - \sum_{(|\alpha| \neq 0} (P^{(\alpha)}(\lambda, \xi) D^{(\alpha)} / i|\alpha|! P(\lambda, \xi))$$

を求め、

$$\widehat{\varphi u}(\lambda, \xi) = \langle u, \varphi e^{-i(t\lambda + x\xi)} \rangle_{t, x}$$

$$= \langle f, u_N \rangle_{t, x} + \langle u, (R(\lambda, \xi, D)^{N+1} \varphi) e^{-i(t\lambda + x\xi)} \rangle_{t, x}$$

を評価する。

(定理の証明)

仮定より、 $WF_\eta(u)$ は有界であるから、 $WF_\eta(u)$ を包みこむように u を cutt-off することにより、 $\text{supp } u$ は (従がって $\text{supp } f$ も) 有界と仮定してよい。そこで

$$P(D_t, D_x) u = f$$

を空間方向に Fourier 変換し

$$(3.3) \quad F(D_t \xi) \hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi)$$

を得る。まず \hat{u}, \hat{f} の $\xi \rightarrow \infty$ に関する order を t について一様にあてえることを考える。

簡単のため $\Omega = \{(t, \xi) : -2 < t < 2\}$ とし、 $-1 \leq t \leq 1$ に於ける以上記のことを考える。

$\phi(t) \in C^\infty((-2, 2))$, $\phi = 1$ on $[-1, 1]$ とすると

$$(3.4) \quad \begin{aligned} D_t^k \hat{u}(t, \xi) &= D_t^k \phi \hat{u}(t, \xi), \quad -1 \leq t \leq 1 \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k \phi \hat{u}(\lambda, \xi) e^{i\lambda t} d\lambda. \end{aligned}$$

一方 $\text{supp } u$ の有界性と補題より

$$|\hat{\phi u}(\lambda, \xi)| \leq \begin{cases} C_N (1 + |\lambda| + |\xi|)^{-N} & ; \quad |\xi| \leq \varepsilon |\lambda|^\rho \\ C (1 + |\lambda| + |\xi|)^M & ; \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

これを用いて (3.4) を評価すると、別の C と M で

$$(3.5) \quad \begin{aligned} |D_t^k \hat{u}(t, \xi)| &\leq (2\pi)^{-1} \left| \int_{|\lambda| \leq (|\xi|/\varepsilon)^{1/\rho}} \lambda^k \hat{\phi u}(\lambda, \xi) e^{i\lambda t} d\lambda + \int_{|\lambda| \geq (|\xi|/\varepsilon)^{1/\rho}} \lambda^k \hat{\phi u}(\lambda, \xi) e^{i\lambda t} d\lambda \right| \\ &\leq C (1 + |\xi|)^M, \quad -1 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

\dagger についても同じ ϕ をとると、 $WF_\eta(\dagger) = \emptyset$ より、或る η の conical nbd Γ が存在し、

$$|\widehat{\phi \dagger}(\lambda, \xi)| \leq C_N (1 + |\lambda| + |\xi|)^{-N}, \quad N=1, 2, \dots, \xi \in \Gamma.$$

これより (3.4), (3.5) と同様の計算で

$$(3.6) \quad |\widehat{f}(t, \xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N}, \quad N=1, 2, \dots, \xi \in \Gamma.$$

を得る。この Γ は定理の条件 (iii) の Γ と同じとしても一般性を失わない。 $P(\lambda, \xi) = 0$ の根を $\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_\ell(\xi)$ とし (3.3) を分解する。

$$(3.7) \quad (D_t - \lambda_1(\xi)) \cdots (D_t - \lambda_\ell(\xi)) \hat{u}(t, \xi) = \widehat{f}(t, \xi)$$

$$\text{また,} \quad w_1(t, \xi) = (D_t - \lambda_2(\xi)) \cdots (D_t - \lambda_\ell(\xi)) \hat{u}(t, \xi)$$

と置く。一方

$$(3.8) \quad C_1 |\xi|^{s_1} \leq |g_m \lambda_j(\xi)|, \quad |\lambda_j(\xi)| \leq C_2 |\xi|^{s_2}, \\ \xi \in \Gamma, \quad 1 \leq j \leq \ell, \quad |\xi| \text{ large}$$

左の不等式は定理の (iii) より、右は多項式の根と係数で評価することから導かれる。(3.5) と (3.8) より、別々の C と M で

$$(3.9) \quad |w_1(t, \xi)| \leq C(1+|\xi|)^M, \quad -1 \leq t \leq 1,$$

これに注意して

$$(3.10) \quad (D_t - \lambda_1(\xi)) w_1(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi)$$

とくと

$$w_1(t, \xi) = e^{-(1-s-t)\lambda_1(\xi)} w_1(s, \xi) + \frac{1}{i} \int_t^s e^{-(1-t')\lambda_1(\xi)} \hat{f}(t', \xi) dt'$$

$$-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad -1 \leq s \leq 1, \quad \text{の範囲で} \quad |\operatorname{Im}(s-t)\lambda_1(\xi)| = -\frac{1}{2} |\lambda_1(\xi)| \quad \text{となるように } s \text{ を選ぶ. 故に}$$

(3.6), (3.8), (3.9) より $\xi \in \Gamma$ の時

$$|w_1(t, \xi)| \leq e^{-\frac{C}{2}|\xi|^{2N}} + \sup_{-1 \leq t \leq 1} |\hat{f}(t, \xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad N=1, 2, \dots, \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$$

よって (3.7) に於て、今と同様な推論を w_2, w_3, \dots, \hat{u} に適用すると、 t の 0 の近傍が定まり、よって一様に

$$(3.11) \quad |\hat{u}(t, \xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad N=1, 2, \dots, \quad \xi \in \Gamma$$

この事実、 t の他の点の近傍についても差別は無いはずだから、(3.11) は $-1 \leq t \leq 1$ で正しい。

このことより $\widehat{\phi u}(\lambda, \xi)$, $\phi \in C^\infty((-1, 1))$, の
 (λ, ξ) , $\xi \in \Gamma$, についての急減少を示すことは容易であ
 る。なぜなら補題より $|\xi| \geq \varepsilon |\lambda|^p$ の時だけ示せばよい
 からである。従って $WF_\eta(u) = \emptyset$ を得る。

参考文献

1. L. Hörmander, On the Singularities of Solutions of Partial Differential Equations, CPAM 23 (1970), 329 ~ 358
2. L. Hörmander, Fourier Integral Operators. I, Acta Math 127 (1971) 79 ~ 183
3. F. John, Non-admissible data for Differential Equations with Constant Coefficients CPAM 10 (1957) 391 ~ 398
4. M. Kashiwara, On C -hyperbolic Differential Operators with Constant Coefficients, 数理解析研究所講究録 145 (1972) 168 ~ 171